Układ Punktów Materialnych.

Równanie Newtona Układu Punktów.

Układ punktów materialnych zawiera więcej niż jeden punkt materialny. Liczbę cząstek w takim układzie oznaczamy przez N . Zatem $N\geqslant 2$. Każdy punkt materialny podlega działaniu sił, które pochodzą od innych cząstek lub są wynikiem oddziaływania spoza układu. Siły te nazywamy odpowiednio wewnętrznymi lub zewnętrznymi . Zgodnie z tym oznaczamy siłę wywieraną na $i-tą$ cząstkę przez $j-tą$ przez $\vec{F}_{ij}$ a sumę sił zewnętrznych działających na $i-tą$ cząstkę przez $\vec{F}_i$. Dla tej $i-tej$ cząstki , której masę oznaczamy jako m_i stosujemy zasadę dynamiki pisząc równanie Newtona :

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i(t)=\vec{F}_{i1}+\vec{F}_{i2}+...+\vec{F}_{iN-1}+\vec{F}_{iN}+\vec{F}_i$$

Mamy zatem układ N równań a indeks numerujący czastkę $1\leqslant i\leqslant N$.
Układ tych równań dynamiki N cząstek brzmi :

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1(t)=\sum_{j=1}^{j=N}\vec{F}_{1j}+\vec{F}_1 \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2(t)=\sum_{j=1}^{j=N}\vec{F}_{2j}+\vec{F}_2 \\ ... \\ m_{(N-1)}\ddot{\vec{r}}_{(N-1)}(t)=\sum_{j=1}^{j=N}\vec{F}_{(N-1)j}+\vec{F}_{(N-1)} \\ m_N\ddot{\vec{r}}_N(t)=\sum_{j=1}^{j=N}\vec{F}_{Nj}+\vec{F}_N \end{cases}$$

Zasadniczo problem polega na rozwiązaniu tego układu przy zadanych siłach oddziaływań wzajemnych i zewnętrznych , prędkościach i położeniach poczatkowych. Podkreślmy jednak wzrost komplikacji problemu wraz ze wzrostem ilości cząstek. Przestrzeń konfiguracyjna dla tego układu to $\mathbb{R}^{6N}$. Zatem poszukujemy zależności od czasu $3N$ współrzędnych położeń i $3N$ współrzędnych prędkości N punktów materialnych. Rozwiązanie takiego wielowymiarowego zagadnienia może być często w praktyce nieosiągalne . Pozostawiając to ważne i skomplikowane zagadnienie jako otwarte, kierujemy ku praktycznym metodom upraszczającym zagadnienie. Uproszczenie owo polega na pewnym uśrednieniu dynamiki punktów materialnych.
Pierwszym krokiem jest zsumowanie wszystkich równań Newtona stronami. Otrzymamy z prawej strony sumę wszystkich działających sił :

$$\sum_{i=1}^{i=N}m_i\ddot{\vec{r}}_i(t)=\sum_{i=1}^{i=N}\sum_{j=1}^{j=N}\vec{F}_{ij}+\sum_{i=1}^{i=N}\vec{F}_i$$

Należy podkreślić formalny charakter takiego działania – dodajemy siły przyłożone do różnych obiektów np. siłę działającą na Ziemię do siły działającej na Księżyc. Musimy zatem zwrócić uwagę jaki można nadać sens takiemu algebraicznemu sumowaniu wektorów.
Siły wewnętrzne znoszą się parami :

$$\vec{F}_{ij}+\vec{F}_{ji}=\vec{0} \quad \text{dla wszystkich} \quad i\neq j$$

na zasadzie dynamiki sił akcji i reakcji. Stąd suma sił wewnętrznych :

$$\sum_{i=1}^{i=N}\sum_{j=1}^{j=N}\vec{F}_{ij}=\sum_{i=1}^{i=N}\vec{F}_{ii}=\vec{0}$$

zeruje się o ile przyjmujemy naturalny warunek braku samooddziaływania punktu materialnego :

$$\vec{F}_{ii}=\vec{0} \quad \text{dla wszystkich} \quad i=1,...,N$$

Zatem suma wszystkich sił jest równa sumie sił zewnętrznych :

$$\vec{\boldsymbol{F}}=\sum_{i=1}^{i=N}\sum_{j=1}^{j=N}\vec{F}_{ij}+\sum_{i=1}^{i=N}\vec{F}_i=\sum_{i=1}^{i=N}\vec{F}_i$$

Siła $\vec{\boldsymbol{F}}$ jest tworem abstrakcyjnym – a priori nie ma ona określonego punktu zaczepienia.Innymi słowy zasadne jest pytanie na jaką masę ta siła. Poszukujemy zatem hipotetycznego równania Newtona. Jeśli wskażemy na całowitą masę układu :

$$\boldsymbol{m}\equiv\sum_{i=1}^{i=N} m_i$$

to możemy napisać owo równanie Newtona w postaci :

$$\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{F}}$$

Równanie to można uważać za definiujące pewien wektor przyspieszenia $\vec{\boldsymbol{a}}\equiv\frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{\boldsymbol{m}}$. Idąc dalej w tym kierunku :

$$\boldsymbol{m}\ddot{\vec{\boldsymbol{r}}}=\vec{\boldsymbol{F}}$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy kolejno hodograf wektora prędkości $\vec{\boldsymbol{v}}(t)$ i na koniec pewną trajektorię $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$.

Wykazujemy , że owa trajektoria to trajektoria środka masy.

Wektor środka masy układu punktów materialnych jest zdefiniowany :

$$\vec{\boldsymbol{r}}\equiv\frac{\sum_{i=1}^{i=N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{i=N} m_i}\equiv\sum_{i=1}^{i=N}\frac{m_i}{\boldsymbol{m}}\vec{r}_i$$

Wektor środka masy układu punktów materialnych jest średnią ważoną położeń punktów materialnych $\vec{r}_i$ z wagą $\frac{m_i}{\boldsymbol{m}}$.

Dla trajektorii środka masy jest :

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t)=\sum_{i=1}^{i=N}\frac{m_i}{\boldsymbol{m}}\vec{r}_i(t)$$

Różniczkując po czasie obustronnie i mnożąc przez masę $\boldsymbol{m}$ otrzymujemy :

$$\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}(t)=\sum_{i=1}^{i=N} m_i\vec{v}_i(t)$$

Zatem pęd środka masy $\vec{\boldsymbol{p}}\equiv\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}$ jest pędem całkowitym układu $\sum_{i=1}^{i=N}\vec{p}_i$ t.j. sumą wszystkich pędów punktów materialnych $\vec{p}_i\equiv m\vec{v}_i$, $i=1,\ldots,N$.

Następne rózniczkowanie odtwarza równanie Newtona ruchu środka masy :

$$\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{F}}$$

Teraz odczytujemy, że przyspieszenie środka masy wywołuje suma sił zewnętrznych.

Reasumując środek masy układu punktów materialnych kreśli trajektorię jak cząstka masywna o masie $\boldsymbol{m}$ pod wpływem siły $\vec{\boldsymbol{F}}$. W ten sposób w wyniku uśrednienia N trajektorii otrzymujemy jedną trajektorię $\vec{\boldsymbol{r}}(t)=\sum_{i=1}^{i=N}\frac{m_i}{\boldsymbol{m}}\vec{r}_i(t)$ reprezentującą zachowanie całego układu.

Zasada Zachowania Pędu.

Jako bezpośrednią konsekwencję powyższych stwierdzeń otrzymujemy zasadę zachowania pędu.Układ odosobniony to układ w którym suma sił zewnętrznych zeruje się. Jeśli bowiem suma sił zewnętrznych $\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{0}$ to całkowity pęd $\vec{\boldsymbol{p}}=\overrightarrow{const}$. Wynika to wprost z Równania Newtona : $\dot{\vec{\boldsymbol{p}}}=\vec{\boldsymbol{F}}$. Wtedy środek masy porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym : $\vec{\boldsymbol{r}}(t)=\vec{v}_o t+\vec{r}_o$ dla $\vec{\boldsymbol{p}}=m\vec{v}_o$. Co więcej jeśli ów pęd zeruje się $\vec{\boldsymbol{p}}=\vec{0}$ to środek masy spoczywa $v_o=0$, $\vec{\boldsymbol{r}}(t)=\vec{r}_o$. Układ, w którym środek masy spoczywa nazywamy układem środka masy. Możemy teraz powiedzieć krótko : w układzie odosobnionym pęd całkowity jest zachowany.

Przykład. Stały pęd galaktyki.
Układ N gwiazd w galaktyce oddziaływujących grawitacyjnie.
Siły oddziaływań Newtona :

$$\vec{F}_{i\,j}=-\frac{GMm}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|^3}(\vec{r}_i-\vec{r}_j) \quad \text{dla} \quad i\neq j$$

Są to siły wewnętrzne dla których

$$\sum_{i=1}^{i=N}\sum_{j=1}^{j=N}\vec{F}_{i\,j}=\sum_{i=1}^{i=N}\vec{F}_{i\,i}=\vec{0}$$

Jeśli ponadto galaktyka jest układem odosobnionym tzn. $\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{0}$ to jej środek masy spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Przykład. Stały zerowy pęd mas drgających na sprężynie.
Na stacji kosmicznej (próżnia , nieważkość) umieszczone są dwie masy m_1 i m_2 na sprężynie o współczynniku sprężystości k . W układzie odosobnionym wywołujemy liniowe drgania mas na sprężynie względem nieruchomego środka masy układu $N=2$ mas. Suma dwóch sił sprężystości zeruje się – są to siły wewnętrzne. Pęd jest zachowany i równy zero jak na początku drgań. Sprężynę traktujemy jako złożoną z dwóch szeregowo połączonych sprężyn , których parametry wynikają z podziału sprężyny na dwie w środku masy (sprężyna jest nieważka).